
کاربرد برنامه ریزی خطی فازی در یافتن مسیر بحرانی پروژه با زمان های فازی

رضا پورموید[۱]، وحید حبیبی نژاد، محمد قریشی

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشگاه علم وصنعت ایران

۲- دنشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشگاه پیام نور تهران

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشگاه علم وصنعت ایران

چکیده

در مبحث کنترل پروژه یافتن مسیر بحرانی برای مدیریت پروژه از اهمیت ویژه ای برخوردار است به این منظور در این مقاله با فرض اینکه زمان انجام فعالیت ها به صورت اعداد فازی اند، مسیر بحرانی از طریق یک مدل برنامه ریزی خطی فازی صفرو یک بدست آمده است که در آن ضرایب متغیر ها در تابع هدف به صورت اعداد فازی اند . برای حل این مدل ابتدا دوگان آن نوشته شده است (که در آن سمت راست محدودیت ها به صورت اعداد فازی است)، سپس با استفاده از رتبه بندی اعداد فازی مدل دوگان به صورت قطعی در آمده که هم ارز مدل دوگان اولیه می باشد، در نتیجه با حل مدل دوگان بدست آمده وتعیین محدودیت های فعال دوگان، متغیر های پایه ای مدل اولیه، و به طبع آن مسیر بحرانی وزمان انجام پروژه تعیین گردیده اند.

واژه های کلیدی: مسیر بحرانی، کنترل پروژه، متغیر های فازی، برنامه ریزی خطی فازی

۱- مقدمه

معمولا یک پروژه را به صورت شبکه ای نشان می دهند که در آن کمان ها نشان دهنده فعالیت ها وگره ها نشان دهنده نقطه شروع وپایان فعالیت ها می باشند هر پروژه ای شامل یک گره آغازین(نشان دهنده زمان شروع پروژه) ویک گره پایانی(نشان دهنده زمان اتمام پروژه) است در یک شبکه مسیر های مختلفی از گره آغازین به گره پایانی وجود دارد در بین این مسیرها مسیری که دارای بیشترین زمان باشد مسیر بحرانی نامیده می شود که برای مدیریت پروژه از اهمیت ویژه ای برخوردار است. بهترین راه برای یافتن زمان انجام فعالیت ها به منظور بدست آوردن مسیر بحرانی استفاده از داده های گذشته می باشد ولی در بسیاری از موارد این اطلاعات وجود ندارد، برای حل این مشکل می توان زمان انجام فعالیت ها را به صورت فازی در نظر گرفت. در این رابطه محققان روش های متفاوتی برای محاسبه مسیر بحرانی در حالت فازی ارائه داده اند که بیشترآن ها مسیر بحرانی را بر اساس حرکات پیش رو وپس رو بدست آورده اندکه می توان به [۲]،[۳]،[۴]،[۵]،[۶] اشاره نمود، در این مقالات زمان های فازی جایگزین زمان های معلوم در حات قطعی شده است.ولی در این حالات معمولا استفاده از حرکت پسرو باعث تخمین نادرست شناوری ها و دیرترین زمان شروع فعالیت ها می شود[۲].یکی دیگر از روش هایی که برای یافتن مسر بحرانی پیشنهاد شده

۱- تهران- نارمک- دانشگاه علم وصنعت – دانشکده مهندسی صنایع، تلفن:۰۹۱۵۵۷۱۵۰۳۳

email:pourmoayed@ind.iust.ac.ir

، استفاده از برنامه ریزی خطی می باشد[۷] که هدف مدل آن یافتن مسیری با بیشترین زمان در شبکه پروژه است (مسیر بحرانی) ما در این مقاله این مدل را، ابتدا در حالتی که زمان انجام فعالیت به صورت قطعی می باشد توضیح می دهیم سپس آن را در حالتی که زمان فعالیت ها به صورت فازی می باشند توسعه می دهیم وروش حلی برای آن پیشنهاد می نماییم.

۲- مدل برنامه ریزی خطی در حالت قطعی

شبکه ای را در نظر می گیریم که آن را با G=(N,A) نشان می دهیم در این شبکه N مجموعه گره ها است (n گره) و A نشان دهنده مجموعه کمان ها است که همان فعالیت ها می باشند در این مجموعه کمان (i,j)نشان دهنده فعالیت (i,j) است .همچنین در این شبکه زمان انجام فعالیت (i,j) رابا T_{ij} نشان می دهیم .

در مدل مربوطه سعی می کنیم از بین مسیر های موجود از گره ابتدایی تا گره انتهایی طولانی ترین مسیررا بیابیم که همان مسیر بحرانی می با شد در این مدل متغیر x_{ij} (از نوع صفرو یک) نشان می دهد که مسیر مربوطه شامل فعالیت (i,j) است یا نه . همچنین محدودیت ها ی این مدل تعادل جریان در گره های شبکه را نشان می دهند. مدل مربوطه به صورت زیر می باشد[۷]:

$$\max P=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}X_{ij}$$

$$s.t.\qquad \sum_{j=1}^{n}X_{1j}=1$$

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=\sum_{k=1}^{n}X_{ki}\qquad i=(1,2,3,\dots,n-1)\tag{۱}$$

$$\sum_{k=1}^{n}X_{kn}=1$$

$$X_{ij}=0,1\qquad\qquad i,j=(1,2,3,\dots,n)$$

خروجی این مدل نشان دهنده مسیر بحرانی شبکه می باشد وزمان انجام پروژه مجموع زمان های فعا لیت هایی است که روی این مسیر قرار دارند که همان مقدار بهینه تابع هدف است.

۳- مدل برنامه ریزی خطی در حالت فازی

در این مدل زمان انجام فعالیت ها را به صورت اعداد فا زی مثلثی در نظر می گیریم که به صورت $\tilde{T}_{ij}=(b_{ij},m_{ij},n_{ij})$ می باشند درجه عضویت این مقادیربه صورت زیر است[۱]:

$$\mu_{\tilde{T}_{ij}}(t)=\begin{cases}\frac{t-b_{ij}}{m_{ij}-b_{ij}} & b_{ij}\le t\le m_{ij}\\ \frac{n_{ij}-t}{m_{ij}-n_{ij}} & m_{ij}\le t\le n_{ij}\\ 0 & \text{سایر مقایر}\end{cases}\tag{۲}$$

در نتیجه مدل اولیه به صورت زیر تغییر می کند:

$$\max\ P = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_{ij} X_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} X_{1j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} - \sum_{k=1}^{n} X_{ki} = 0 \quad i = (1,2,3,\dots,n-1) \qquad (۳)$$

$$-\sum_{k=1}^{n} X_{kn} = -1$$

$$X_{ij} = 0,1 \qquad i,j = (1,2,3,\dots,n)$$

در مدل فوق طرفین بعضی از محدودیت ها برای راحتی کار در ادامه جابجا شده است .

۴- حل مدل برنامه ریزی خطی در حالت فازی

برای حل مدل (۲) ابتدا دوگان آن را نوشته که به صورت زیر می باشد:

$$\min\ w_n - w_0$$

$$w_j - w_i \geq \tilde{T}_{ij} \qquad (۴)$$

w_i, w_j آزاد در علامت

در مدل فوق w_i, w_j نشان دهنده زودترین زمان شروع فعا لیت هایی است که از گره های i,j شروع می شوند، تا بع هدف این مدل کوتاهترین زمان انجام پروژه را نشان می دهد که درحالت بهینه مقدار آن برابر با زمان انجام پروژه می باشد. همچنین طرف راست محدودیت های مدل فوق به صورت اعداد فازی $\tilde{T}_{ij} = (b_{ij}, m_{ij}, n_{ij})$ هستند . برای حل مدل دوگان ابتدا از رتبه بندی اعداد فازی که به طرفین محدودیت های مدل فوق اعمال می شود استفاده شده است، برای این منظور باید سمت چپ محدودیت ها را هم به صورت اعداد مثلثی $(w_j - w_i, w_j - w_i, w_j - w_i)$ در نظر گرفت. (مدل ۵)

$$\min\ w_n - w_0$$

$$R(w_j - w_i, w_j - w_i, w_j - w_i) \geq R(b_{ij}, m_{ij}, n_{ij}) \qquad i = 1,2\dots,n \qquad j = 1,2,\dots,n$$

w_i, w_j آزاد در علامت (۵)

در این مقاله از روش رتبه بندی با استفاده از میانگین (با توزیع نسبی) به خاطر ایجاد محدودیت های خطی استفاده شده است. همچنین این رتبه بندی باعث ایجاد مقادیری نزدیک به میانگین اعداد فازی و انحراف معیار کم می شود[۱].

$$R(b_{ij}, m_{ij}, n_{ij}) = \frac{b_{ij} + 2m_{ij} + n_{ij}}{4} \qquad (۶)$$

$$R(w_j - w_i, w_j - w_i, w_j - w_i) = \frac{w_j - w_i + 2(w_j - w_i) + w_j - w_i}{4} \qquad (۷)$$

با جایگذاری مقادیر بالا در (۵) وساده کردن ، مدل(۸) که هم ارز مدل (۴) است بدست می آید.

$$\min \quad w_n - w_0 \qquad (۸)$$

$$w_j - w_i \geq \frac{b_{ij} + 2m_{ij} + n_{ij}}{4}$$

w_i, w_jآزاد در علامت $\qquad i = 1,2 \ldots, n \qquad j = 1,2, \ldots, n$

حال $w_0 = 0$ قرار داده و مدل برنامه ریزی خطی فوق را حل کرده ومحدویت های فعال را تعیین می کنیم از روی این محدودیت ها متغیر های پایه ای مدل اولیه که مقدار یک را دارند یافته ومسیر بحرانی را می یابیم همچنین مقدار تابع هدف مدل فوق در حالت بهینه زمان انجام پروژه را نشان می دهد.

نتیجه گیری

در این مقاله برای بدست آوردن مسیر بحرانی در حالتی که زمان انجام فعالیت ها به صورت فازی بودند از برنامه ریزی خطی فازی صفرویک استفاده شد .. برای حل مدل از دوگان آن استفاده کردیم که در آن سمت راست محدودیت های دوگان به صورت فازی در آمدند در مرحله بعد محدودیت ها دوگان را با استفاده از رتبه بندی اعداد فازی به صورت خطی در آورده و مدل مربوطه را حل کردیم با حل مدل دوگان وتعیین محدودیت های فعال دوگان متغیر های پایه ای مدل اولیه که مقدار یک دارند را یافتیم .این متغیر ها نشان دهنده مسیر بحرانی پروژه می باشند. و همچنین زمان انجام پروژه برابربا مقدار تابع هدف در حالت بهینه مسئله دوگان می باشد.

منابع

۱- مهدی غضنفری، محمودرضایی، مقدمه ای بر نظریه مجموعه های فازی، چاپ اول، انتشارات دانشگاه علم وصنعت ایران،۱۳۸۵

[2] P. Zielin´ ski, On computing the latest starting times and floats of activities in a network with imprecise durations, Fuzzy Sets Syst. 150 (2005) 53–76.

[3] S. Chanas, P. Zielin´ ski, Critical path analysis in the network with fuzzy activity times, Fuzzy Sets Syst. 122 (2001) 195–204.

[4] S. Chanas, P. Zielin´ ski, On the hardness of evaluating criticality of activities in a planar network with duration intervals, Oper. Res.Lett. 31 (2003) 53–59.

[5] S.M.T. Fatemi Ghomi, E. Teimouri, Path critical index and task critical index in PERT networks, European Journal of Operational Research 141 (2002) 147–152.

[6] D. Dubois, H. Fargier, V. Galvagonon, On latest starting times and floats in task networks with ill-known durations, European Journal of Operational Research 147 (2003) 266–280.

[7] E.Elmaghrabi, H.Soewandi, M.Yao, chance constraint programming in activity networks :a critical evaluation, European Journal of Operational Research, 131 (2001) 440-458