مدلهای DEA برای تخمین خروجی وبهبود کارائی با داده های فازی

دکترعباسعلی نورا[1] ، سارافناطی رشیدی [2]
۱.عضوهیات علمی دانشگاه سیستان وبلوچستان
۲. مدرس دانشگاه آزاد اسلامی واحد یاسوج

چکیده :
دراین مقاله مدلهای DEA رابرای بهبود بخشی واحدهای ناکارا در حالت فازی بررسی می کنیم به این ترتیب که دریک واحد تصمیم گیرنده (DMU) ورودی هارا به میزان معینی افزایش وبا استفاده از مدلهای DEA در صورت ثابت ماندن کارائی یابهبود آن مقدار خروجی ها را تخمین می زنیم البته با این فرض که داده ها یعنی همان ورودی ها وخروجی ها فازی هستند وافزایش یا کاهش آنها بر اساس یک معیار رتبه بندی بین دو عدد فازی می باشد .

واژه های کلیدی : تحلیل پوششی داده ها(DEA)- برنامه ریزی فازی - واحد تصمیم گیرنده (DMU) – کارائی

۱.مقدمه

یکی از مسائلی که در سالهای اخیر در DEA مطرح می شود مساله تخمین خروجی ها است که اولین بار توسط وی ویان مطرح شد به این صورت که اگر در یک DMU ورودی ها را به میزان معینی افزایش دهیم وبخواهیم کارائی ثابت بماند چقدر خروجی باید تولید کنیم که مدل ارائه شده برای پاسخ به این سوال را مدل DEA معکوس می نامند .در این مقاله به بررسی حالتی می پردازیم که ورودی ها وخروجی ها فازی باشندومساله مطرح شده بالا را با داده های فازی مورد بررسی قرارداده ،با استفاده از α برشها آن را به یک مساله بازه ای تبدیل کرده آنگاه با استفاده از روش نور مدلی را برای حل آن پیشنهاد می دهیم .

۱. پست الکترونیکی : DR.NOORA@HAMOON.USB.AC.IR
۲. پست الکترونیکی : sarafanati@yahoo.com

۲.مدلهای DEA برای تخمین خروجی وبهبود بخشی

n واحد تصمیم گیرنده $(DMU_1,...,DMU_n)$ در نظر می گیریم وفرض کنیم که $X_j=(x_{1j},...,x_{mj})$ بردارورودی و $Y_j=(y_{1j},....,y_{sj})$ بردار خروجی j، DMU ام باشندکه برای هر $j=1,...,n$ داریم $Y_j>0$, $X_j>0$ است اگر φ_o^* را میزان کارائی DMU_o در نظر بگیریم وفرض کنیم ورودی های DMU_o را از X_o به $\alpha_O=X_O+\Delta X_0$ که $\Delta X_o\neq 0$, $\Delta X_o\geq 0$افزایش داده ایم در صورتی که بخواهیم شاخص کارائی φ_o^* باقی بماند این DMU چقدر خروجی باید تولید کند ؟ یعنی می خواهیم بردار خروجی $\beta_O=(\beta_{1O},...,\beta_{SO})$ را طوری تخمین بزنیم که کارائی DMU_o ، φ_o^* باقی بماند مدل پیشنهادشده توسط یان برای پاسخ به این سوال با عنوان مدل DEA معکوس به صورت زیر است :

$$\begin{aligned}
&Max \quad \beta_O=(\beta_{1O},...,\beta_{SO})\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j\leq \alpha_o\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j\geq \varphi_o^*\beta_o \qquad\qquad (1)\\
&\qquad \beta_o\geq Y_o\\
&\qquad \lambda_j\geq 0 \quad j=1,...,n
\end{aligned}$$

حال اگر X_o را به α_O افزایش دهیم وبخواهیم کارائی DMU_o نیز به اندازه η درصد از φ_o^* بهبود یابد کافی است در مدل فوق به جای φ_o^* قرار دهیم $(1-\eta/100)\varphi_o^*$. برای حل مساله چند هدفی بالا می توان به هر یک از خروجی ها به نسبت اهمیتشان یک وزن اختصاص داده ومجموع وزن دار شده آنها را($\sum_{r=1}^{s}c_r\beta_{ro}$) به جای تابع هدف قرار دهیمدر این صورت مسئله به یک مساله برنامه ریزی خطی معمولی تبدیل می گردد که به راحتی قابل حل است .

بخش ۳ :برنامه ریزی فازی

در این بخش با فرض اینکه تمامی ورودی ها و خروجی ها فازی هستند ابتدا کارائی را محاسبه می کنیم . بـرای ایـن منظـور مـدل مضربی CCR با ماهیت خروجی با داده های فازی به صورت زیر است :

$$
\begin{aligned}
&Min \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{m} v_i(\tilde{x}_{io}) \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r(\tilde{y}_{ro}) = 1 \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r(\tilde{y}_{rj}) - \sum_{i=1}^{m} v_i(\tilde{x}_{ij}) \le 0 \qquad j = 1,\dots,n \qquad\qquad (2) \\
&\qquad u_r \ge 0 \qquad r = 1,\dots,s \\
&\qquad v_i \ge 0 \qquad i = 1,\dots,m
\end{aligned}
$$

کـه درآن $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}, \underline{y_{rj}}, \overline{y_{rj}})$ و $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}, \underline{x_{ij}}, \overline{x_{ij}})$ و $\tilde{x}_{io} = (x_{io}, \underline{x_{io}}, \overline{x_{io}})$ و $\tilde{y}_{ro} = (y_{ro}, \underline{y_{ro}}, \overline{y_{ro}})$ اعـدادفازی LR هستند که $y_{ro}, x_{io}, y_{rj}, x_{ij}$ مدها و $\underline{y_{ro}}, \underline{x_{io}}, \underline{y_{rj}}, \underline{x_{ij}}$ پهنه های چپ و $\overline{y_{ro}}, \overline{x_{io}}, \overline{x_{ij}}, \overline{y_{rj}}$ پهنه های راسـت مـی باشند که α برش این اعداد بصورت زیر می باشد :

$$
\begin{aligned}
(\tilde{x}_{ij})_\alpha &= \left[x_{ij} - \underline{x_{ij}} L^{-1}(\alpha) \quad , \quad x_{ij} + \overline{x_{ij}} R^{-1}(\alpha)\right] \\
(\tilde{y}_{rj})_\alpha &= \left[y_{rj} - \underline{y_{rj}} L^{-1}(\alpha) \quad , \quad y_{rj} + \overline{y_{rj}} R^{-1}(\alpha)\right] \\
(\tilde{x}_{io})_\alpha &= \left[x_{io} - \underline{x_{io}} L^{-1}(\alpha) \quad , \quad x_{io} + \overline{x_{io}} R^{-1}(\alpha)\right] \\
(\tilde{y}_{ro})_\alpha &= \left[y_{ro} - \underline{y_{ro}} L^{-1}(\alpha) \quad , \quad y_{ro} + \overline{y_{ro}} R^{-1}(\alpha)\right]
\end{aligned}
$$

مساله فازی (۲) بااستفاده از α برش ها به صورت زیر تبدیل می شود :

$$Min \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{m} v_i \left[x_{io} - \underline{x_{io}} L^{-1}(\alpha) \quad , \quad x_{io} + \overline{x_{io}}\, R^{-1}(\alpha) \right]$$

$$s.t.$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r \left[y_{ro} - \underline{y_{ro}} L^{-1}(\alpha) \quad , \quad y_{ro} + \overline{y_{ro}}\, R^{-1}(\alpha) \right]$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r \left[y_{rj} - \underline{y_{rj}} L^{-1}(\alpha) \quad , \quad y_{rj} + \overline{y_{rj}}\, R^{-1}(\alpha) \right] - \qquad (۳)$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \left[x_{ij} - \underline{x_{ij}} L^{-1}(\alpha) \quad , \quad x_{ij} + \overline{x_{ij}}\, R^{-1}(\alpha) \right] \le 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$u_r \ge 0 \qquad r = 1,\ldots,s$$

$$v_i \ge 0 \qquad i = 1,\ldots,m$$

مدل بالا یک مدل برنامه ریزی بازه ای است که به راحتی با روشهای حل مسائل بازه ای از جمله روش تانگ شوچنگ وروش نور می توان آن را حل کردکه در این صورت یک بازه کارائی $\left[\varphi^{L*} \;,\; \varphi^{u*}\right]$برای آن بدست می آید .

۴-تخمین خروجی ها با داده های فازی :

یکDMU رابا ورودی ها وخروجی ها ووزنهای فازی درنظر بگیرید که ورودی های این DMU رااز $\tilde{X}_O$ به $\tilde{\alpha}_O$ باتوجه به یکی از معیارهای رتبه بندی بین دو عدد فازی مثل رویکرد رتبه بندی رامیک وریمانک افزایش داده ایم . رویکرد رتبه بندی رامیک وریمانک برای اعداد فازی LR به این صورت معرفی می شود ؛اگر $\tilde{b} = (b, \underline{b}, \overline{b})$ و $\tilde{a} = (a, \underline{a}, \overline{a})$ دو عدد فازی LR باشند ،رامیک وریمانک معتقدند که :

$$\tilde{a} < \tilde{b} \qquad iff \qquad a < b \;,\; \underline{a} < \underline{b} \;,\; \overline{a} < \overline{b}$$

حال برای تخمین مقدار ورودی ها اگر کارائی ثابت بماند مطابق آنچه گفته شد داریم :

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \beta_o=\sum_{r=1}^{s}\tilde{c}_r\beta_{ro} \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{x}_{ij}\le\tilde{\alpha}_{io} \qquad i=1,...,m \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{y}_{rj}\ge\left[\varphi^{l*}\ ,\ \varphi^{u*}\right]\beta_{ro} \qquad r=1,...,s \\
& \beta_o\ge\tilde{Y}_o \\
& \lambda_j\ge 0 \qquad j=1,...,n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

که در آن $\tilde{c}_r=(c_r\ ,\ \underline{c_r}\ ,\overline{c_r})$ و $\tilde{y}_{rj}=(y_{rj}\ ,\underline{y_{rj}}\ ,\overline{y_{rj}})$ و $\tilde{x}_{ij}=(x_{ij}\ ,\underline{x_{ij}}\ ,\overline{x_{ij}})$ و $\tilde{\alpha}_{io}=(\alpha_{io}\ ,\underline{\alpha_{io}}\ ,\overline{\alpha_{io}})$ اعداد فازی LR می باشند که $\alpha_{io}\ ,\ y_{rj}\ ,\ x_{ij}\ ,c_r$ مدها و $\underline{\alpha_{io}}\ ,\underline{y_{rj}}\ ,\underline{x_{ij}}\ ,\underline{c_r}$ پهنه های چپ و $\overline{\alpha_{io}}\ ,\overline{x_{ij}}\ ,\overline{y_{rj}}\ ,\overline{c_r}$ پهنه های راست می باشند . α برش این اعداد بصورت زیر می باشد:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{c}_r)&=\left[c_r-\underline{c_r}L^{-1}(\alpha)\quad ,\quad c_r+\overline{c_r}\ R^{-1}(\alpha)\right] \\
(\tilde{x}_{ij})_\alpha&=\left[x_{ij}-\underline{x_{ij}}L^{-1}(\alpha)\quad ,\quad x_{ij}+\overline{x_{ij}}\ R^{-1}(\alpha)\right] \\
(\tilde{y}_{rj})_\alpha&=\left[y_{rj}-\underline{y_{rj}}L^{-1}(\alpha)\quad ,\quad y_{rj}+\overline{y_{rj}}\ R^{-1}(\alpha)\right] \\
(\tilde{\alpha}_{io})_\alpha&=\left[\alpha_{io}-\underline{\alpha_{io}}L^{-1}(\alpha)\quad ,\quad \alpha_{io}+\overline{\alpha_{io}}\ R^{-1}(\alpha)\right]
\end{aligned}
$$

که به این ترتیب مساله برنامه ریزی بازه ای زیربدست می آید .

(5)

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \beta_o=\sum_{r=1}^{s}\left[c_r-\underline{c_r}L^{-1}(\alpha)\quad ,\quad c_r+\overline{c_r}\ R^{-1}(\alpha)\right]\beta_{ro} \\
s.t \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left[x_{ij}-\underline{x_{ij}}L^{-1}(\alpha)\quad ,\quad x_{ij}+\overline{x_{ij}}\,R^{-1}(\alpha)\right]\le\left[\alpha_{io}-\underline{\alpha_{io}}L^{-1}(\alpha)\quad ,\quad \alpha_{io}+\overline{\alpha_{io}}\,R^{-1}(\alpha)\right] \quad i=1,...,m \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left[y_{rj}-\underline{y_{rj}}L^{-1}(\alpha)\quad ,\quad y_{rj}+\overline{y_{rj}}\,R^{-1}(\alpha)\right]\ge\left[\varphi^{l*}\ ,\ \varphi^{u*}\right]\beta_{ro} \qquad r=1,...,s \\
& \beta_o\ge\left[y_{ro}-\underline{y_{ro}}L^{-1}(\alpha)\quad ,\quad y_{ro}+\overline{y_{ro}}\,R^{-1}(\alpha)\right] \\
& \lambda_j\ge 0 \qquad j=1,...,n
\end{aligned}
$$

برای حل مساله برنامه ریزی بازه ای فوق با استفاده از روش نور تئوری زیر را پیشنهاد می دهیم.

۵-تخمین خروجی ها با داده های بازه ای:

فرض کنیدn واحد تصمیم گیرنده باm ورودی وs خروجی داریم که ورودی ها وخروجی های آن بصورت بازه ای هستندپس همانطور که در فصل قبل دیدیم برای هر DMU یک بازه کارائی خاص مثل $\left[\varphi^{*l}, \varphi^{*u}\right]$ بدست می آید . حال فرض کنید که ورودی های DMU_o را از بازه $\left[X_o^l, X_o^u\right]$ به بازه $\left[\alpha_o^l, \alpha_o^u\right]$ افزایش دهیم و بخواهیم خروجی هارا در صورت ثابت ماندن کارائی تخمین بزنیم در این صورت مدل (۱)به صورت زیر در می آید:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \beta_o = (\beta_{1o},\ldots,\beta_{so}) \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[x_{ij}^l \,, x_{ij}^u\right] \le \left[\alpha_{io}^l \,, \alpha_{io}^u\right] \qquad i=1,\ldots,m \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[y_{rj}^l \,, y_{rj}^u\right] \ge \left[\varphi^{*l} \,, \varphi^{*u}\right] \beta_{ro} \qquad r=1,\ldots,s \\
&\qquad \beta_{ro} \ge \left[y_{rj}^l \,, y_{rj}^u\right] \qquad r=1,\ldots,s \\
&\qquad \lambda_j \ge 0 \qquad j=1,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

که در آن $x_{ij} \in \left[x_{ij}^l , x_{ij}^u\right]$ و $y_{rj} \in \left[y_{rj}^l , y_{rj}^u\right]$ و $\alpha_{io} \in \left[\alpha_{io}^l , \alpha_{io}^u\right]$ و $\varphi \in \left[\varphi^{*l} , \varphi^{*u}\right]$ اکنون با استفاده از روش نور با توجه به مفهوم بازه های محدب از تبدیلات زیر استفاده می کنیم :

$$x_{ij}^l \le x_{ij} \le x_{ij}^u \ \Rightarrow x_{ij} = \gamma_{ij} x_{ij}^u + (1-\gamma_{ij}) x_{ij}^l = x_{ij}^l + \gamma_{ij}(x_{ij}^u - x_{ij}^l)$$
$$0 \le \gamma_{ij} \le 1 \qquad i=1,\ldots,m \ , \ j=1,\ldots,n$$

از آنجا که α_{io} و x_{io} هر دو ورودی i ام DMU_o هستند برای بردار α_o نیز می توان از متغیر γ_o استفاده کرد پس داریم :

$$\alpha_{io}^l \le \alpha_{io} \le \alpha_{io}^u \quad \Rightarrow \alpha_{io} = \gamma_{io}\alpha_{io}^u + (1-\gamma_{io})\alpha_{io}^l = \alpha_{io}^l + \gamma_{io}(\alpha_{io}^u - \alpha_{io}^l)$$
$$0 \le \gamma_{io} \le 1 \qquad i=1,\ldots,m$$

$$y_{rj}^l \le y_{rj} \le y_{rj}^u \Rightarrow y_{rj} = \delta_{rj} y_{rj}^u + (1-\delta_{rj}) y_{rj}^l = y_{rj}^l + \delta_{rj}(y_{rj}^u - y_{rj}^l)$$
$$0 \le \delta_{rj} \le 1 \qquad r=1,\ldots,s \quad , \quad j=1,\ldots,n$$
$$\varphi^{*l} \le \varphi \le \varphi^{*u} \quad \Rightarrow \varphi = t\varphi^{*u} + (1-t)\varphi^{*l} = \varphi^{*l} + t(\varphi^{*u} - \varphi^{*l})$$
$$0 \le t \le 1$$

با جایگزینی عبارات فوق در مدل (۳-۲۶)داریم :

$$\begin{aligned}
&Max \quad \beta_o = (\beta_{1o},\ldots,\beta_{so}) && (7)\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_{ij}^l + \gamma_{ij}(x_{ij}^u - x_{ij}^l)) \le \alpha_{io}^l + \gamma_{io}(\alpha_{io}^u - \alpha_{io}^l) && i=1,\ldots,m\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y_{rj}^l + \delta_{rj}(y_{rj}^u - y_{rj}^l)) \ge \left[\varphi^{*l} + t(\varphi^{*u} - \varphi^{*l})\right]\beta_{ro} && r=1,\ldots,s\\
&\beta_{ro} \ge y_{ro}^l + \delta_{ro}(y_{ro}^u - y_{ro}^l) && r=1,\ldots,s\\
&0 \le \gamma_{ij} \le 1 \qquad j=1,\ldots,n \quad , \quad i=1,\ldots,m\\
&0 \le \delta_{rj} \le 1 \qquad j=1,\ldots,n \quad , \quad r=1,\ldots,s\\
&0 \le t \le 1\\
&\lambda_j \ge 0 \qquad j=1,\ldots,n
\end{aligned}$$

که با ضرب متغیر λ_j در عبارت به مدل زیر تبدیل می شود :

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \beta_o = (\beta_{1o},\ldots,\beta_{so})\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^l + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \gamma_{ij}(x_{ij}^u - x_{ij}^l) \le \alpha_{io}^l + \gamma_{io}(\alpha_{io}^u - \alpha_{io}^l) \qquad i=1,\ldots,m\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}^l + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \delta_{rj}(y_{rj}^u - y_{rj}^l)) \ge \varphi^{*l}\beta_{ro} + t\beta_{ro}(\varphi^{*u} - \varphi^{*l}) \qquad r=1,\ldots,s\\
&\beta_{ro} \ge y_{ro}^l + \delta_{ro}(y_{ro}^u - y_{ro}^l) \qquad r=1,\ldots,s \qquad (8)\\
&0 \le \gamma_{ij} \le 1 \qquad j=1,\ldots,n \quad , \quad i=1,\ldots,m\\
&0 \le \delta_{rj} \le 1 \qquad j=1,\ldots,n \quad , \quad r=1,\ldots,s\\
&0 \le t \le 1\\
&\lambda_j \ge 0 \qquad j=1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

مدل فوق بدلیل وجود عوامل $\lambda_j\gamma_{ij}$ ، $\lambda_j\delta_{rj}$ و $t\beta_{ro}$ غیر خطی است که با تغییر متغیر های زیر به برنامه ریزی خطی تبدیل می شود .

$$\lambda_j\gamma_{ij} = p_{ij} \quad , \quad 0 \le \gamma_{ij} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le p_{ij} \le \lambda_j$$

$$\lambda_j\delta_{rj} = p_{rj} \quad , \quad 0 \le \delta_{rj} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le p_{rj} \le \lambda_j$$

$$t\beta_{ro} = \beta'_{ro} \quad , \quad 0 \le t \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \beta'_{ro} \le \beta_{ro}$$

با اعمال تغییر متغیر های فوق بر مدل (۸)مدل زیر بدست می آید :

$$
\begin{aligned}
&MAX \qquad \beta_o = (\beta_{1o},\ldots,\beta_{so})\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^l + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_{ij}^u - x_{ij}^l) \le \alpha_{io}^l + \gamma_{io}(\alpha_{io}^u - \alpha_{io}^l) && i=1,\ldots,m\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}^l + \sum_{j=1}^{n} p_{rj}(y_{rj}^u - y_{rj}^l)) \ge \varphi^{*l}\beta_{ro} + \beta'_{ro}(\varphi^{*u} - \varphi^{*l}) && r=1,\ldots,s\\
&\beta_{ro} \ge y_{ro}^l + \delta_{ro}(y_{ro}^u - y_{ro}^l) && r=1,\ldots,s\\
&0 \le \gamma_{io} \le 1 \qquad i=1,\ldots,m && (9)\\
&0 \le p_{ij} \le \lambda_j \qquad j=1,\ldots,n \qquad i=1,\ldots,m\\
&0 \le \delta_{ro} \le 1 \qquad r=1,\ldots,s\\
&0 \le p_{rj} \le \lambda_j \qquad j=1,\ldots,n \qquad r=1,\ldots,s\\
&0 \le \beta'_{ro} \le \beta_{ro} \qquad r=1,\ldots,s\\
&\lambda_j \ge 0 \qquad j=1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

مدل (۹)در واقع همان مدل (۶) می باشد که به صورت خطی تبدیل شده است همانطور که می دانیم با بزرگتر شدن ناحیه شدنی ،جواب بهینه بدتر نخواهد شد . بنابراین برای حصول بهترین جواب تا حد امکان ناحیه شدنی را بزرگ می کنیم . بنابراین باید $0 \le \gamma_{io} \le 1$ بیشترین مقدار خود یعنی $\gamma_{io} = 1$ و $0 \le p_{ij} \le \lambda_j$ باید کمترین مقدار خود یعنی صفر را بگیرد وچون داریم $p_{ij} = \lambda_j \gamma_{ij}$

در نتیجه γ_{ij}ها باید مساوی صفر باشند اما چون در دسته اول قیود در طرف دوم نامعادله $\gamma_{io} = 1$ می – باشددرطرف اول نامعادلات نیز باید γ_{io} را مساوی یک قرار دهیم ،ولی برای سایر $0 \le p_{ij} \le \lambda_j$ و $j \ne o \;,\; j=1,\ldots,n$ داریم $p_{ij} = 0$. با همین تفکر برای دسته سوم قیود می خواهیم ناحیه شدنی را تا حد ممکن بزرگ کنیم بنابراین در دسته سوم قیود می خواهیم $0 \le \delta_{ro} \le 1$ کمترین مقدار خود یعنی صفر را بگیرد در نتیجه δ_{ro} را مساوی صفر قرار می دهیم ودر دسته دوم قیود برای هر چه بزرگترشدن ناحیه شدنی باید $0 \le p_{rj} \le \lambda_j$ بیشترین مقدار خود را بگیرند ولی چون در قید سوم δ_{ro}را مساوی صفر قرار دادیم وداریم $p_{ro} = \delta_{ro}\lambda_j$ در نتیجه $p_{ro} = 0$ ولی در بقیه موارد $j \ne o \;,\; j=1,\ldots,n$ داریم: $p_{rj} = \lambda_j$ وهمینطور برای $0 \le \beta'_{ro} \le \beta_{ro}$ باید β'_{ro} کمترین مقدار خود را بگیردیعنی $\beta'_{ro} = 0$.

همچنینقرار می دهیم $t = 0$ که در نتیجه داریم $\varphi = \varphi^l$به این ترتیب مدل (۹)به مدل زیر تبدیل می شود :

$$
\begin{aligned}
&Max \qquad \beta''_o = (\beta_{1o},\ldots,\beta_{so})''\\
&s.t.\\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\ne o}}^{n}\lambda_j x_{ij}^l + \lambda_o x_{io}^u \le \alpha_{io}^u && i=1,\ldots,m\\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\ne o}}^{n}\lambda_j y_{rj}^u + \lambda_o y_{ro}^l \ge \varphi^{*l}\beta_{ro} && r=1,\ldots,s\\
&\beta_{ro} \ge y_{ro}^l && r=1,\ldots,s\\
&\lambda_j \ge 0 && j=1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

(۱۰)

که در آن $\alpha_o^u = X_o^u + \Delta X_o^u$ و $\Delta X_o^u \ge 0$.
وبا همین روش اگر بخواهیم تا حد ممکن ناحیه شدنی را کوچک در نظر بگیریم با همین تفکر به مدل زیر می رسیم :

$$\begin{aligned}
&Max \quad && \beta'_o = (\beta_{1o},...,\beta_{so})' \\
&s.t. && \\
& && \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n} \lambda_j x_{ij}^u + \lambda_o x_{io}^l \le \alpha_{io}^l \qquad i=1,...,m \\
& && \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n} \lambda_j y_{rj}^l + \lambda_o y_{ro}^u \ge \varphi^{*u} \beta_{ro} \qquad r=1,...,s \\
& && \beta_{ro} \ge y_{ro}^u \\
& && \lambda_j \ge 0 \quad j=1,....,n
\end{aligned} \tag{11}$$

که درآن $\alpha_o^l = X_o^l + \Delta X_o^l$ که $\Delta X_o^l \ge 0$ و همیشه داریم $\alpha_o^l \le \alpha_o^u$.

حال با توجه به روش های برنامه ریزی بازه ای مطابق با آنچه که گفته شد مساله فازی(۴) به دو مساله برنامه ریزی خطی زیر تبدیل می شود : (۱۲)

$$\begin{aligned}
&Max \quad && \beta'_o = \sum_{r=1}^{s} \left(c_r - \underline{c_r} L^{-1}(\alpha)\right)\beta_{ro} \\
&s.t && \\
& && \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n} \lambda_j \left(x_{ij} + \overline{x_{ij}}\, R^{-1}(\alpha)\right) + \lambda_O\, (x_{io} - \underline{x_{io}} L^{-1}(\alpha)) \le \left(\alpha_{io} - \underline{\alpha_{io}} L^{-1}(\alpha)\right) \qquad i=1,...,m \\
& && \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n} \lambda_j \left(y_{rj} - \underline{y_{rj}} L^{-1}(\alpha)\right) + \lambda_O\, (y_{ro} + \overline{y_{ro}} R^{-1}(\alpha)) \ge \varphi^{u*} \beta_{ro} \qquad r=1,...,s \\
& && \beta_o \ge y_{ro} + \overline{y_{ro}}\, R^{-1}(\alpha) \\
& && \lambda_j \ge 0 \qquad j=1,...,n
\end{aligned}$$

و

$$
\begin{aligned}
&Max \qquad \beta_o^{u*} = \sum_{r=1}^{s} \left(c_r + \overline{c_r}\ R^{-1}(\alpha) \right) \beta_{ro} \\
&s.t \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(x_{ij} - \underline{x_{ij}} L^{-1}(\alpha) \right) + \lambda_o \left(x_{io} + \overline{x_{io}} R^{-1}(\alpha) \right) \le \left(\alpha_{io} + \overline{\alpha_{io}}\ R^{-1}(\alpha) \right) \qquad i = 1,\ldots,m \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(y_{rj} + \overline{y_{rj}}\ R^{-1}(\alpha) \right) + \lambda_o \left(y_{ro} - \underline{y_{ro}} L^{-1}(\alpha) \right) \ge \varphi^{l*}\ \beta_{ro} \qquad r = 1,\ldots,s \\
&\qquad \beta_o \ge y_{ro} - \underline{y_{ro}} L^{-1}(\alpha) \\
&\qquad \lambda_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots.,n
\end{aligned} \tag{13}
$$

وبه این ترتیب مدل فازی(۴) به دو مدل خطی فوق تبدیل شده ویک بازه برای خروجی ها بدست می آورد. اینک اگر بخواهیم کارائی دربهترین حالت به اندازه γ درصد φ^{l*} ودر بدترین حالت به اندازه μ درصد φ^{u*}بهبود یابد درمدل حاصل شده به جای φ^{l*} ، $(1-\gamma/100)\varphi^{l*}$وبه جای φ^{u*}، $(1-\mu/100)\varphi^{u*}$ قرار می دهیم .

مثال عددی:سهDMU را با دو ورودی و دو خروجی با داده هایی به فرم زیر در نظر بگیرید :

جدول شماره ۱- ورودی‌ها و خروجی‌های فازی

DMU	ورودی اول	ورودی دوم	خروجی اول	خروجی دوم
DMU1	$\tilde{x}_{11} = (15,16,17)$	$\tilde{x}_{21} = (11,13,15)$	$\tilde{y}_{11} = (7,7/5,8)$	$\tilde{y}_{21} = (5,6,7)$
DMU2	$\tilde{x}_{12} = (1,2,3)$	$\tilde{x}_{22} = (1,1/5,2)$	$\tilde{y}_{12} = (0/75,0/875,1)$	$\tilde{y}_{22} = (0/5,0/625,0/75)$
DMU3	$\tilde{x}_{13} = (22,23/5,25)$	$\tilde{x}_{23} = (3/75,3/875,4)$	$\tilde{y}_{13} = (4,5,6)$	$\tilde{y}_{23} = (3/5,3/75,4)$

که هر یک از اعداد فوق اعداد مثلثی متقارن به صورت $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}, \underline{x_{ij}}, \overline{x_{ij}})$ و $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}, \underline{y_{rj}}, \overline{y_{rj}})$ می باشند حال فرض کنیم که ورودی های DMU_2 را از $\tilde{x}_{12} = (1,2,3)$ به $\tilde{\alpha}_{12} = (4,4/25,4/5)$ و ورودی دوم را از $\tilde{x}_{22} = (1,1/5,2)$ به $\tilde{\alpha}_{22} = (5,5/25,5/5)$ تغییر داده ایم، با توجه به معیار رتبه بندی رامیک وریمانک می توان گفت ورودی ها را افزایش داده ایم . حال در صورتی که بخواهیم کارائی ثابت بماند چه مقدار خروجی باید تولید کنیم با فرض اینکه خروجی اول ودوم به ترتیب وزن ۲و۳ دارند .(البته می توان وزنها را نیز به صورت فازی در نظر گرفت که در این مثال از حالت قطعی وزنها استفاده شده است)

حل:با استفاده از مدل (۴) حالت فازی مدل را نوشته وسپس به کمک سه α برش (صفر-نیم-یک)مسئله را به مسائل بازه ای معادل تبدیل می کنیم که برای α برش صفر مسئله فوق به صورت زیر فرمولبندی می شود :

جدول شماره ۲- بازه بدست آمده از αبرش صفربرای ورودی ها وخروجی های فازی

DMU	بازه ورودی اول	بازه ورودی دوم	بازه خروجی اول	بازه خروجی دوم	بازه کارائی
DMU_1	$[15\ ,\ 17]$	$[11\ ,\ 15]$	$[7\ ,\ 8]$	$[5\ ,\ 7]$	$[1\ ,\ 1/68]$
DMU_2	$[1\ ,\ 3]$	$[1\ ,\ 2]$	$[0/75\ ,\ 1]$	$[0/5\ ,\ 0/75]$	$[1\ ,\ 1/77]$
DMU_3	$[25\ ,\ 22]$	$[3/75\ ,\ 4]$	$[4\ ,\ 6]$	$[4\ ,\ 6]$	$[1\ ,\ 1]$

مدل مجموع وزن دار شده با استفاده از مساله زیر حل می شود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \beta' = 2\beta_1' + 3\beta_2' \\
&s.t. \\
&\quad 17\lambda_1 + \lambda_2 + 25\lambda_3 \le 4 \\
&\quad 15\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \le 5 \\
&\quad 7\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 - 1/77\beta_{12}' \ge 0 \\
&\quad 5\lambda_1 + 0/75\lambda_2 + 3/5\lambda_3 - 1/77\beta_{22}' \ge 0 \\
&\quad \beta_{12}' \ge 1 \\
&\quad \beta_{22}' \ge 0/75 \\
&\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

که در این صورت جواب بهینه ومقداربهینه تابع هدف بصورت زیرمی باشد:

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \beta_1'', \beta_2'') = (0\ ,\ 4\ ,\ 0\ ,\ 2/22\ ,\ 1/73\ ) \ge 0$ و $\beta''^{*} = 9/72$.

$$\begin{aligned}
&Max \quad \beta'' = 2\beta_1'' + 3\beta_2'' \\
&s.t. \\
&\quad 15\lambda_1 + 3\lambda_2 + 22\lambda_3 \le 4/5 \\
&\quad 11\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3/75\lambda_3 \le 5/25 \\
&\quad 8\lambda_1 + 0/75\lambda_2 + 6\lambda_3 - \beta_1'' \ge 0 \\
&\quad 7\lambda_1 + 0/5\lambda_2 + 4\lambda_3 - \beta_2'' \ge 0 \\
&\quad \beta_1'' \ge 0/75 \\
&\quad \beta_2'' \ge 0/5 \\
&\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0
\end{aligned}$$

که در این صورت جواب بهینه ومقداربهینه تابع هدف بصورت زیرمی باشد:

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \beta_1'', \beta_2'') = (0/3\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,2/4\ ,\ 2/1) \ge 0$ و $\beta''^{*} = 11/1$.

به طور مشابه برای αبرشهای نیم ویکمسائل را فرمولبندی کرده وحل می کنیم که نتایج حل آن درجدول زیر خلاصه شده است :

جدول شماره ۳- نتایج α برش‌ها

	αبرش صفر	αبرش نیم	αبرش یک
بازه بدست آمده برای خروجی اول	$[2/22\ ,\ 2/4\ ]$	$[1/5\ ,\ 2/18]$	$1/67$
بازه بدست آمده برای خروجی دوم	$[1/73\ ,\ 2/1]$	$[1/14\ ,\ 1/83]$	$1/33$
بازه بدست آمده بـرای مجمـوع وزن دار شده خروجی ها	$[9/72\ ,\ 11/1]$	$[6/43\ ,\ 9/87]$	$7/33$

نتیجه گیری : تمامی مسائل فازی از جمله بهبود بخشی با داده های فازی در DEAرا می توان با استفاده از روشهای موجـود از جمله روش α برشها به مسائل بازه ای وخطی تبدیل وآنها را حل نمود.از محاسن این روش بدست آوردن یک بازه جواب اسـت کـه می توان در تصمیم گیری ها بعنوان یک راهنما از آن استفاده کرد وازمعایب آن عدم دقت کافی در جواب بدست آمده اسـت کـه بـا توجه به مفهوم فازی ومنطق حاکم بر آناین عیب نیز قابل پیش بینی می باشد.

منابع:

[1].نورا عباسعلی ،***روش حلی برای مسائل برنامه ریزی خطی بازه ای و برنامه ریزی خطی فازی***،پنجمین کنفـرانس سیـستم های فازی ایران (۱۳۸۳).

[2]. Delgado .M, Verdegay J.L., Vita M.A., ***A general model for fuzzy linear programming***, Fuzzy Sets and systems 29 (1989) 21-29.

[3].Jahanshahloo.G.R, Hosseinzadeh lotfi .F, Shoja .N, Tohidi .G, Razavyan .S, ***Input estimation and identification of extra inputs in invers DEA models*** ,Applied matematics and computation 156(2004)427-437

[4]. Jahanshahloo.G.R,Hosseinzadeh lotfi .F,Rezai Balf .F,Zhiani Rezai.H, ***The outputs Estimation and improvement of efficiency with interval data in DEA,*** working paper.

[5]. Wei.Q,Zhang.L.J.Zhang.X, ***An Invers DEA model for input/output estimate,*** European Journal of Operational Research 121(1) (2000) 151-163

[6]. Yan .H,Wei.Q.L,Hao.G, ***DEA models for resource resllocation and production input/output estimation,*** European Journal of Operational Research 136(2002) 19-31