

ارائه یک روش جدید در نحوه محاسبه نرخ بازگشت سرمایه داخلی

بهنام بابایی سعید آبادی^{۱*}، آزاده زندی^۲، احمد اصل حداد^۳

تهران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده صنایع، behnam.babaei64@yahoo.com
تهران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده صنایع، azadeh.zandi@gmail.com
تهران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده صنایع، ahadad@kntu.ac.ir

چکیده

یک مدیر برای مقایسه اقتصادی پروژه‌ها باید با استفاده از تکنیک‌های اقتصاد مهندسی، اقتصادی‌ترین پروژه را تعیین نماید. بدین منظور روش‌های متعددی ارائه شده است، از قبیل روش ارزش فعلی^۴، روش یکنواخت سالانه^۵، روش نرخ بازگشت سرمایه داخلی^۶ و ... روش (PV) روشی است که به نتایج قابل اطمینان منجر می‌شود ولی به دلایلی بعضی از مدیران و تصمیم‌گیرندگان تمایل بیشتری به استفاده از روش (IRR) دارند. اما روش (IRR) دارای مشکلاتی جدی می‌باشد. رویکرد هازن^۷ چشم‌انداز جدیدی را در مورد این موضوع بیان کرده است و مشکلات زیادی با این رویکرد حل می‌شود، ولی قادر به پاسخگویی تمامی مشکلات روش (IRR) نیست. در این بین، روش دیگری تحت عنوان متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی^۸ توسط مگنی^۹ ارائه شد که مشکلات روش (IRR) را حل می‌کند، ولی کاربرد و فهم آن آسان نیست. در این مقاله به ارائه یک روش جدید می‌پردازیم که از رویکردهای هازن و مگنی نشئت گرفته ولی دارای محاسباتی به مراتب ساده‌تر از روش (AIRR) بوده و در عین حال تمامی مشکلات روش (IRR) را پوشش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: نرخ بازگشت سرمایه داخلی، جریان سرمایه‌گذاری خالص^{۱۰}، جریان قرض‌گیری خالص^{۱۱}، متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی

۱- مقدمه

مقایسه اقتصادی و تعیین اقتصادی بودن پروژه‌ها، یکی از با اهمیت‌ترین موضوع‌های تصمیم‌گیری برای هر مدیر است. یک مدیر باید با استفاده از تکنیک‌های اقتصاد مهندسی اقتصادی‌ترین پروژه را تعیین نماید. بدین منظور روش‌های متعددی ارائه شده است، از قبیل روش ارزش فعلی، روش یکنواخت سالانه، روش نرخ بازگشت سرمایه و ... برای مرور این روش‌ها به هر کتاب اقتصاد مهندسی از جمله [1] می‌توان مراجعه کرد. در این میان دو روش ارزش فعلی و نرخ بازگشت سرمایه داخلی، از

۱ و * - نویسنده مسئول: دانشجوی کارشناسی ارشد رشته مهندسی صنایع

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد رشته مهندسی صنایع

۳- عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

⁴ Present Value (PV)

⁵ Equivalent Uniform Annual

⁶ Internal Rate of Return (IRR)

⁷ Hazen

⁸ Average Internal Rate of Return (AIRR)

⁹ Magni

¹⁰ Net Investment Stream

¹¹ Net Borrowung Stream

پرکاربردترین روش های معرفی شده می باشند. روش (PV) روشی است که به نتایج قابل اطمینان منجر می شود و روش بسیار خوبی است، ولی به دو دلیل بعضی از مدیران و تصمیم گیرندگان تمایل بیشتری به استفاده از روش (IRR) دارند: اولاً روش (IRR) نسبت به روش (PV) قابل فهم تر است.

ثانیا مقایسه اقتصادی پروژه ها از طریق روش (PV) بستگی به عمر پروژه ها دارد. با مقایسه عمر پروژه ها با یکدیگر سه حالت مختلف به وجود می آید. در حالتی که عمر پروژه ها با هم برابر نباشند، محاسبات طولانی گشته و احتمال خطا در محاسبات افزایش می یابد. ولی مقایسه اقتصادی پروژه ها از طریق روش (IRR) بستگی به عمر پروژه ها ندارد و عددی را نشان می دهد که با اعداد دیگر مثل نرخ بانک قابل مقایسه است. با وجود مزایای ذکر شده برای روش (IRR)، این روش دارای مشکلات جدی می باشد:

(۱) امکان به وجود آمدن چند نرخ بازگشت سرمایه داخلی واقعی
(۲) امکان به وجود آمدن نرخ (یا نرخ های) بازگشت سرمایه داخلی پیچیده
(۳) مقایسه اقتصادی پروژه ها با استفاده از نتایج روش (IRR)، قاعدتا با نتایج حاصل از روش (PV) ناسازگار است.
(۴) اگر نرخ بهره در دوره های مختلف متغیر باشد، روش (IRR) قابل استفاده نیست.

در بسیاری از مقالات مدیریتی و اقتصادی، به بررسی مشکلات (IRR) پرداخته شده و تحقیقات گسترده ای طی ۸۰ سال گذشته برای یافتن روش های اصلاحی مناسب انجام شده است. از جمله این مقالات به [2],[3],[4] می توان اشاره کرد که روی پروژه هایی که یک مقدار حقیقی برای (IRR) در فاصله $(-\infty)$ و (∞) به دست می آید، کار کردند. [5],[6] پروژه های با یک نرخ بازگشت سرمایه داخلی حقیقی را در فاصله $(0, \infty)$ بررسی کردند. [7], [8] از فرض قابلیت قطع پروژه به منظور به دست آوردن یک (IRR) استفاده کردند. [9],[10] روند سرمایه گذاری مجدد با نرخ بازگشت سرمایه خارجی^{۱۲} را برای حل مشکل بررسی کرده اند. [11],[12] از نرخ بازگشت سرمایه داخلی اصلاح شده^{۱۳} به جای (IRR) برای حل مشکل استفاده کردند.

ولی این تحقیقات مشکلات را حل نمی نماید و بعضا با استفاده از راه حل هایی سعی بر حل مشکل دارند که در اصل آنها باید تامل کرد، مثلا وارد کردن پروژه های دیگر و استفاده از نرخ آن به عنوان نرخ بازگشت سرمایه خارجی به نحوی به مسئله فیصله می دهد اما به جواب واقعی نمی رسد و بحث های جدیدی را به وجود می آورد که در اینجا اشاره نمی شود.

ولی در این بین رویکرد هازن [13]، چشم انداز جدیدی را در مورد این موضوع بیان کرده که تفاوت های زیادی با رویکرد های پیشین دارد. هازن بیان می کند که حتی هنگامی که نرخ های بازگشت سرمایه داخلی چند گانه و یا حتی موهومی هستند، بر حسب نوع جریان سرمایه گذاری، سرمایه گذاری خالص یا جریان قرض گیری خالص، تفسیر با معنایی خواهند داشت و در صورت انتخاب و استفاده از هر کدام از نرخ های به دست آمده، نتایج حاصل از بررسی پروژه، در رد یا پذیرش جریان مالی، هیچ مغایرتی با یکدیگر ندارند. با وجود اینکه رویکرد هازن، پیشبرد زیادی در حل مشکلات (IRR) ایجاد کرد، ولی هنوز کمبود هایی وجود دارد، با رویکرد هازن برخی مشکلات حل نشده باقی ماند که از جمله آنها می توان به موارد زیر اشاره کرد:

(۱) ممکن است اولویت بندی پروژه ها میسر نباشد.
(۲) برای مواردی که نرخ بهره در طول دوره های مختلف ثابت نمی ماند، راه حلی ارائه نشده است.

رویکرد دیگری تحت عنوان متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی توسط مگنی [14] ارائه شده که پاسخگو به تمامی مشکلات روش (IRR) می باشد ولی محاسبات و کاربرد آن به سادگی قابل فهم نمی باشد. این مقاله روش جدیدی را ارائه می کند که دارای محاسباتی ساده و آسان تر نسبت به روش متوسط نرخ بازگشت داخلی (AIRR) است و البته پاسخگو به تمامی مشکلات روش (IRR) نیز می باشد. در ابتدا به معرفی رویکرد هازن پرداخته، سپس رویکرد متوسط نرخ بازگشت داخلی (AIRR) را معرفی و در نهایت روش جدید ارائه می گردد.

¹² External Rate of Return (ERR)

¹³ Modified Internal Rate of Return (MIRR)

۲- فرضیات ریاضی و نتایج اولیه:

یک پروژه یا یک جریان فرآیند مالی یک توالی $x = (x_0, x_1, \dots, x_T) \in R^{T+1}$ از فرآیند مالی می باشد. با توجه به توالی x ارزش فعلی خالص پروژه عبارت است از:

$$PV(x|r) = \sum_{t=1}^T x_t \cdot (1+r)^{-t} \quad r > -1 \quad (1)$$

ارزش آینده خالص پروژه x عبارت است از:

$$PV_T(x|r) = PV(x|r) \cdot (1+r)^T \quad (2)$$

و پروژه ای اقتصادی است که اگر و فقط اگر: $(1+r) \geq 0$ و یا به طور معادل اگر و فقط اگر: $PV_T(x|r) \geq 0$ نرخ بازگشت داخلی پروژه را می توان از طریق هر یک از معادله های زیر به دست آورد:

$$PV(x|r) = 0 \quad (3)$$

$$PV_T(x|r) = 0 \quad (4)$$

اگر C_{t-1} بیان کننده مبلغ سرمایه گذاری شده (یا قرض گرفته شده) در دوره $[t-1, t]$ باشد و R_t بیان کننده درآمد تولید شده بوسیله ی پروژه در دوره باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$R_t = c_t - c_{t-1} + x_t \quad c_0 = -x_0, \quad c_T = 0 \quad (5)$$

اگر K_t نرخ بهره دوره t ، $C_{t-1} \geq 0$ و $K_t = R_t / C_{t-1}$ باشد، آنگاه معادله بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$C_t = c_{t-1}(1+k_t) - x_t \quad c_0 = -x_0, \quad c_T = 0 \quad (6)$$

بردار جریان سرمایه گذاری را به صورت $C = (c_1, c_2, \dots, c_{T-1}) \in R^T$ و بردار نرخ بهره را به صورت $K = (k_1, k_2, \dots, k_T) \in R^T$ نشان می دهیم. در رویکرد هازن نرخ های بهره در هر دوره با هم برابر می باشند، بنابراین می توان بردار نرخ بهره را به صورت $k = (k, k, \dots, k)$ نشان داد و رابط (۶) را به صورت زیر بیان نمود:

$$C_t = c_{t-1}(1+k) - x_t \quad c_0 = -x_0, \quad c_T = 0 \quad (7)$$

۳- رویکرد هازن:

در رویکرد هازن نرخ های بهره در طول دوره ثابت در نظر گرفته می شوند. هازن می گوید مهم نیست که از کدام نرخ بازگشت برای تعیین اقتصادی بودن پروژه استفاده کنیم زیرا فرآیند مالی به ازای هر یک از نرخ ها دارای یک جریان سرمایه گذاری می باشد که با تحلیل هر کدام از آنها می توانیم اقتصادی بودن پروژه را تعیین کنیم. برای مشاهده اثبات تمامی قضایای موجود در این بخش می توان به [13] رجوع کرد.

قضیه ۱:

اگر بردار جریان سرمایه گذاری $C = (c_1, c_2, \dots, c_{T-1})$ مربوط به بردار فرآیند مالی $X = (x_0, x_1, \dots, x_T)$ و r مبین نرخ بازار^{۱۴} باشد، آنگاه:

$$PV(x|r) = \frac{k-r}{1+r} \cdot PV(c|r) \quad (8)$$

قضیه ۲:

کمیت K نرخ بازگشت داخلی جریان فرآیند مالی X است، اگر و فقط اگر یک جریان سرمایه گذاری C مربوط به X تحت نرخ بهره ثابت K وجود داشته باشد.

$$PV(x|r=k) = \frac{k-k}{1+r} \cdot PV(c|r) = 0 \quad (9)$$

قضیه ۳:

¹⁴ Market Rate

فرض کنید k یک نرخ بازگشت سرمایه داخلی برای جریان فرآیند مالی x و c یک جریان سرمایه گذاری مربوط به x تحت نرخ بهره ثابت k باشد، آنگاه خواهیم داشت:

الف) اگر $PV(c | r) > 0$ باشد، سپس $PV(x | r) \geq 0$ (پروژه اقتصادی خواهد بود) اگر و فقط اگر $k \geq r$

ب) اگر $PV(c | r) < 0$ باشد، سپس $PV(x | r) \geq 0$ (پروژه اقتصادی خواهد بود) اگر و فقط اگر $k \leq r$

پ) اگر $PV(c | r) = 0$ (سرمایه گذاری خالص) باشد، سپس $PV(x | r) = 0$

اگر $PV(c | r) > 0$ باشد، آنگاه به جریان فرآیند مالی، جریان سرمایه گذاری خالص می‌گوییم و اگر $PV(c | r) < 0$ باشد، آنگاه به جریان فرآیند مالی، جریان فرض گیری خالص می‌گوییم. با توجه به تعریف ذکر شده، قضیه ۳ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

قضیه ۴:

فرض کنید جریان فرآیند مالی x مربوط به یک جریان سرمایه گذاری خالص یا یک جریان فرض گیری خالص تحت نرخ بازگشت داخلی ثابت k باشد، آنگاه خواهیم داشت:

الف) اگر فرآیند مالی x یک جریان سرمایه گذاری خالص باشد، رابطه $PV(x | r) \geq 0$ برقرار خواهد بود، اگر و فقط اگر $k \geq r$

ب) اگر فرآیند مالی x یک جریان فرض گیری خالص باشد، رابطه $PV(x | r) \geq 0$ برقرار خواهد بود، اگر و فقط اگر $k \leq r$

رویکرد هازن در رتبه بندی پروژه ها راه حل کامل و مناسبی ارائه نمی‌کند ولی در مورد پذیرش یا رد پروژه رویکردی کامل می‌باشد، حتی اگر فرآیند مالی دارای چند نرخ بازگشت سرمایه داخلی یا نرخ (های) بازگشت سرمایه داخلی پیچیده باشد. شایان ذکر است که نرخ بازار جزء داده های مسئله می‌باشد.

تعیین اقتصادی بودن پروژه با رویکرد هازن برای نرخ (های) بازگشت سرمایه داخلی واقعی:

گام اول: نرخ (های) بازگشت سرمایه داخلی فرآیند مالی را با استفاده از معادله (۳) یا (۴) به دست بیاورید.

گام دوم: برای نرخ (های) به دست آمده با استفاده از معادله (۷) جریان (های) سرمایه گذاری مربوطه را به دست بیاورید.

گام سوم: ابتدا ارزش فعلی جریان (های) سرمایه گذاری را به دست آورید، سپس با استفاده از قضیه ۳ یا ۴ اقتصادی یا عدم اقتصادی بودن فرآیند مالی را تعیین کنید.

قضیه ۵:

فرض کنید k یک نرخ بازگشت سرمایه داخلی پیچیده برای فرآیند مالی x باشد، آنگاه:

الف) اگر ارزش فعلی قسمت حقیقی بردار سرمایه گذاری مثبت باشد $(PV(Re(c) | r) > 0)$ ، سپس رابطه $PV(x | r) \geq 0$ برقرار خواهد بود، اگر و فقط اگر $Re(k) \geq r$ باشد. $(Re(k)$ یعنی قسمت حقیقی نرخ بازگشت سرمایه داخلی پیچیده)

ب) اگر ارزش فعلی قسمت حقیقی بردار سرمایه گذاری منفی باشد $(PV(Re(c) | r) < 0)$ ، سپس رابطه $PV(x | r) \geq 0$ برقرار خواهد بود، اگر و فقط اگر $Re(k) \leq r$ باشد.

تعیین اقتصادی بودن پروژه با رویکرد هازن برای نرخ (های) بازگشت داخلی سرمایه پیچیده:

گام اول و گام دوم: همانند گام اول و دوم تعیین مطلوبیت پروژه برای نرخ بازگشت سرمایه داخلی واقعی می‌باشد.

گام سوم: ابتدا ارزش فعلی قسمت حقیقی جریان (های) سرمایه گذاری را به دست آورید، سپس با استفاده از قضیه ۵ اقتصادی یا عدم اقتصادی بودن فرآیند مالی را تعیین کنید.

مثال ۱:

در جدول شماره ۱ اطلاعات مربوط به ۴ پروژه داده شده است. اگر نرخ بازار ۱۰٪ باشد $(r = 10\%)$ ، تعیین کنید کدام پروژه(ها) تحت نرخ بازار (r) اقتصادی می‌باشد؟

جدول شماره ۱

	پروژه ۱	پروژه ۲	پروژه ۳	پروژه ۴
X_0	-۱	-۱	-۱	-۱
X_1	۶	۳	۵	۴
X_2	-۱۱	-۲.۵	-۶	-۴
X_3	۶			
$PV(x r = 10\%)$	-۰.۱۲۸	-۰.۳۳۹	-۱.۴۱۳	-۰.۶۶۹

با توجه به ارزش فعلی پروژه ها، می بینیم که تمامی پروژه ها غیر اقتصادی می باشند. حال با رویکرد هازن مسئله را تحلیل می کنیم. ابتدا باید با استفاده از معادله (۳) یا (۴) نرخ (های) بازگشت سرمایه داخلی هر پروژه را به دست می آوریم. پروژه ۱ دارای سه نرخ بازگشت سرمایه داخلی واقعی (۰٪، ۱۰۰٪، ۲۰۰٪) می باشد. حالا باید با استفاده از رابطه ی (۷) جریان سرمایه گذاری مربوط به هر یک از نرخ های بازگشت را به دست آورده و ارزش فعلی هر یک از آنها را تحت نرخ بازار تعیین نماییم.

جدول شماره ۲

	۰٪	۱۰۰٪	۲۰۰٪
C_0	۱	۱	۱
C_1	-۵	-۴	-۳
C_2	۶	۳	۲
C_3	۰	۰	۰
$PV(c r = 10\%)$	۱.۴۱	-۰.۱۵۷	-۰.۰۷۴۴

طبق جدول شماره ۲ می بینیم که به ازای $k = 0\%$ ، ارزش فعلی جریان سرمایه گذاری مثبت (۱.۴۱) می باشد، بنابراین جریان سرمایه گذاری یک جریان سرمایه گذاری خالص است. طبق قضیه ۳ یا ۴ و به دلیل اینکه $k = 0\% < r = 10\%$ می باشد، بنابراین پروژه ۱ غیر اقتصادی می باشد جریان سرمایه گذاری به ازای $k = 100\%$ چون ارزش فعلی جریان سرمایه گذاری منفی (-۰.۱۵۷) می باشد، یک جریان قرض گیری خالص است. طبق قضیه ۳ یا ۴ و چون $k = 100\% > r = 10\%$ است، بنابراین پروژه ۱ غیر اقتصادی می باشد. در ضمن به ازای $k = 200\%$ ارزش فعلی جریان سرمایه گذاری منفی (-۰.۰۷۴۴) است، بنابراین جریان سرمایه گذاری یک جریان قرض گیری خالص می باشد. مجدداً بر اساس قضیه ۳ یا ۴ و چون $k = 200\% > r = 10\%$ است، پس پروژه ۱ غیر اقتصادی می باشد.

می بینیم که نتایج تفسیر و بررسی هر یک از نرخ های بازگشت سرمایه داخلی پروژه ۱، یکسان بوده و همگی غیر اقتصادی بودن پروژه ۱ را بیان می کنند که نتیجه حاصله با نتیجه به دست آمده از روش ارزش فعلی (PV) سازگاری دارد. با استفاده از معادله (۳) یا (۴) خواهیم دید که پروژه ۲ دارای نرخ بازگشت سرمایه داخلی واقعی نمی باشد، اما دارای دو نرخ بازگشت سرمایه داخلی پیچیده ($k = 0.5 \pm 0.5 i$) می باشد. با استفاده از معادله (۷) جریان سرمایه گذاری را به دست آورده، سپس ارزش فعلی قسمت حقیقی جریان سرمایه گذاری را تعیین می کنیم. $PV(Re(c) | r = 10\%) < 0$ به دست آمد. بر اساس قضیه ۵ و چون $Re(k) = 50\% > r = 10\%$ می باشد، بنابراین پروژه ۲ غیر اقتصادی می باشد. شایان ذکر است که نتیجه حاصله با نتیجه به دست آمده از روش ارزش فعلی (PV) سازگاری دارد.

با استفاده از معادله (۳) یا (۴) خواهیم دید که پروژه ۳ دارای دو نرخ بازگشت داخلی واقعی ($k = 100\%$ ، $k = 200\%$) می باشد. جدول شماره ۳ جریان سرمایه گذاری مربوط به هر یک از نرخ های بازگشت سرمایه داخلی پروژه را نشان می دهد.

جدول شماره ۳

	%۱۰۰	%۲۰۰
C_0	۱	۱
C_1	-۳	-۲
C_2	۰	۰
C_3	۰	۰
$PV(c r=10\%)$	-۱.۷۳	-۰.۸۱۸

طبق جدول شماره ۳ می بینیم که به ازای 200% , $k = 100\%$ ارزش فعلی هر دو جریان سرمایه گذاری منفی (-۰.۸۱۸) و (-۱.۷۳) می باشد، بنابراین هر کدام از جریان های سرمایه گذاری، یک جریان قرض گیری خالص می باشند. طبق قضیه ۳ یا ۴ و چون $r = 10\% > k = 200\%$, $k = 100\%$ می باشند، بنابراین پروژه ۳ غیر اقتصادی می باشد. پروژه ۴ دارای یک نرخ بازگشت سرمایه داخلی واقعی $(k = 100\%)$ می باشد. جریان سرمایه گذاری به ازای $(k = 100\%)$ $(۱ - ۲)$ $C =$ می باشد. (-۰.۸۱۸) ارزش فعلی جریان سرمایه گذاری است، بنابراین جریان سرمایه گذاری، یک جریان قرض گیری خالص است و چون $r = 10\% > k = 100\%$ می باشد، بنابراین پروژه ۴ غیر اقتصادی است.

۴- رویکرد متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی (AIRR):

مگنی [14] در مقاله ای با ارائه راه حلی تحت عنوان متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی به حل این مشکل می پردازد با این نگرش که در رویکرد هازن نرخ های بهره در طول دوره های مختلف ثابت می باشند، در حالیکه این مصداق معمولاً برقرار نیست، اما در رویکرد متوسط نرخ بازگشت داخلی، نرخ های بهره در طی دوره های مختلف لزوماً با هم برابر نیستند، بنابراین به دنبال محاسبه متوسط نرخ بازگشت داخلی (\bar{K}) هستیم. برای مشاهده اثبات تمامی قضایای موجود در این بخش می توان به [14] رجوع کرد.

قضیه ۶:

جریان سرمایه گذاری دلخواه $C = (c_1, c_2, \dots, c_{T-1}) \in R^T$ را در نظر بگیرید، سپس معادله زیر را می توان بیان نمود:

$$PV(x|r) = \sum_{t=1}^T (R_t - r \cdot c_{t-1}) \cdot (1+r)^{-t} \quad (10)$$

با جایگذاری رابطه $R_t = K_t \cdot C_{t-1}$ در معادله بدست آمده از قضیه ۶، معادله زیر به دست می آید:

$$PV(x|r) = \sum_{t=1}^T c_{t-1} \cdot (k_t - r) \cdot (1+r)^{-t} \quad (11)$$

اگر در معادله (۱۱) به جای استفاده از نرخ بهره در دوره t (K_t) از متوسط نرخ های بهره (\bar{K}) استفاده کنیم، معادله های (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) به دست خواهند آمد. [15] , [16]

$$\sum_{t=1}^T c_{t-1} \cdot (k_t - r) \cdot (1+r)^{-t} = \sum_{t=1}^T c_{t-1} \cdot (\bar{k} - r) \cdot (1+r)^{-t} \quad (11)$$

$$\bar{k} = \frac{\sum_{t=1}^T k_t \cdot c_{t-1} \cdot (1+r)^{-t}}{\sum_{t=1}^T c_{t-1} \cdot (1+r)^{-t}} = \frac{\sum_{t=1}^T k_t \cdot c_{t-1} \cdot (1+r)^{-(t-1)}}{PV(c|r)} \quad (12)$$

$$\bar{k} = r + \frac{PV1(x|r)}{PV(c|r)} = r + \frac{PV(x|r) \cdot (1+r)}{PV(c|r)} \quad (13)$$

قضیه ۷:

برای هر جریان سرمایه گذاری دلخواه $C = (c_1, c_2, \dots, c_{T-1})$ خواهیم داشت:

الف) اگر $PV(c|r) > 0$ (سرمایه گذاری خالص) باشد، سپس رابطه $PV(x|r) \geq 0$ برقرار است، اگر و فقط اگر $\bar{k} > r$

ب) اگر $PV(c|r) < 0$ (قرض گیری خالص) باشد، سپس رابطه $PV(x|r) \geq 0$ برقرار است، اگر و فقط اگر $\bar{k} < r$

پ) اگر $PV(c|r) = 0$ (جریان خنثی) باشد، سپس $PV(x|r) = 0$ برقرار است، اگر و فقط اگر $\bar{k} = r$
تعیین اقتصادی بودن پروژه با استفاده از رویکرد متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی (AIRR):

گام اول: یک جریان سرمایه گذاری دلخواه را به طوری در نظر بگیرید که شرط های رابطه (۶) را احراز نماید.

گام دوم: بردار نرخ بهره را با استفاده از معادله (۶) به دست بیاورید.

گام سوم: با استفاده از معادله (۱۳) مقدار متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی (\bar{K}) را به دست آورده و با توجه به قضیه (۷) اقتصادی و یا عدم اقتصادی بودن پروژه را تعیین کنید.

شایان ذکر است که الگوریتم تعیین اقتصادی بودن پروژه با استفاده از رویکرد متوسط نرخ بهره (AIRR) بستگی به نوع و تعداد نرخ بازگشت سرمایه داخلی پروژه ندارد.

رتبه بندی پروژه ها با استفاده از روش متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی (AIRR):

گام اول: برای هر پروژه یک جریان سرمایه گذاری دلخواه انتخاب کنید، به طوری که ارزش فعلی جریان سرمایه گذاری پروژه ها تحت نرخ بازار با هم برابر باشد و هر یک از جریان های سرمایه گذاری شروط رابطه (۶) را احراز نماید.

گام دوم: با استفاده از معادله (۱۳) مقدار متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی (\bar{K}) را برای هر پروژه به دست آورید.

گام سوم: در نهایت پروژه ای دارای اولویت بالاتر است که متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی بزرگتری داشته باشد.

مثال ۲:

فرآیند مالی (۲.۲۵، -۱.۵ و -۰.۷۵ و ۰ و ۰.۷۵ و ۱.۵ و ۲.۲۵ و ۳ و -۴) $x =$ را در نظر بگیرید. با توجه به نرخ بازار ۵٪ تعیین کنید آیا پروژه اقتصادی است؟

فرآیند مالی ذکر شده دارای دو نرخ بازگشت سرمایه داخلی واقعی $k_1 = ۱۰.۴۳\%$ و $k_2 = ۲۶.۳۱\%$ می باشد. حال باید بدون توجه به نرخ های بازگشت سرمایه داخلی واقعی، یک یا چند جریان سرمایه گذاری دلخواه را انتخاب کرده و بردار نرخ بهره مربوطه را با استفاده از معادله (۶) به دست آورد. ما برای حل این مسئله ۴ جریان سرمایه گذاری دلخواه و متفاوت را در نظر می گیریم.

جدول شماره ۴

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	$PV(c r)$	\bar{k}
C^1	۴	۲	۱	-۰.۵	-۱	-۴	-۲	-۱۰.۵	۰	-۶.۵۳	۱۰.۴۳٪
نرخ بهره	-	٪۲۵	٪۶۲.۵	٪۰	٪-۵۰	٪۳۰۰	٪-۳۱.۲۵	٪۴۹۹.۹	٪-۷۸.۵۷		
C^2	۴	۲	-۲	-۳	-۴۰.۸	-۴	-۲	-۱	۰	-۷.۱۹۵	۹.۹۳٪
نرخ بهره	-	٪۲۵	٪-۸۷.۵	٪-۲۵	٪۱۱	٪-۱.۹۶	٪-۳۱.۲۵	٪۲۵	٪۱۲۵		
C^3	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۰	۲۷.۱۴۵	۳.۶۹٪
نرخ بهره	-	٪۷۵	٪۵۶.۲۵	٪۳۷.۵	٪۱۸.۷۵	٪۰	٪-۱۸.۷۵	٪-۳۷.۵	٪-۱۵۶.۲۵		
C^4	۴	۲	۱	۱	-۰.۱	-۰.۳	-۲	-۱	۰	۵.۱۵۵	-۱.۸۸٪
نرخ بهره	-	٪۲۵	٪۶۲.۵	٪۱۵۰	٪-۳۵	٪۲۰۰	٪۸۱۶.۶۷	٪۲۵	٪۱۲۵		

با توجه به جدول شماره ۴، جریان های سرمایه گذاری C^1 و C^2 دارای ارزش فعلی منفی تحت نرخ بازار هستند، پس C^1 و C^2 جریان های قرض گیری خالص می باشند و چون مقادیر \bar{k}^1 و \bar{k}^2 بزرگتر از نرخ بازار می باشند، (بر اساس قضیه ۷) بنابراین پروژه X غیر اقتصادی است. جریان های سرمایه گذاری C^3 و C^4 دارای ارزش منفی تحت نرخ بازار هستند، پس C^3 و C^4 جریان های سرمایه گذاری خالص می باشند و چون مقادیر \bar{k}^3 و \bar{k}^4 کوچکتر از نرخ بازار می باشند، (بر اساس قضیه ۷) بنابراین پروژه X غیر اقتصادی است. ارزش فعلی فرآیند مالی X تحت نرخ بازار (۵٪) برابر با -۰.۳۳۸ می باشد که منجر به عدم پذیرش پروژه X می شود، پس نتیجه حاصل از رویکرد با نتیجه روش ارزش فعلی یکی می باشد.

مثال ۳:

پروژه های زیر را در نظر بگیرید، سپس اقتصادی ترین پروژه را تعیین کنید. (نرخ بازار = ۵٪)

جدول شماره ۵

پروژه	$x_1 = (-10, 100, 10, 110)$	$x_2 = (-90, 69, 10, 12, 20)$	$x_3 = (-35, 50, -18)$
$PV(x r = 5\%)$	۱۳.۶	۱۱.۶	-۳.۷

با توجه به جدول شماره ۵ و روش ارزش فعلی می بینیم که رتبه بندی پروژه ها به صورت $x_1 > x_2 > x_3$ می باشد. حال برای رتبه بندی پروژه ها بر اساس روش (AIRR) باید سه جریان سرمایه گذاری دلخواه را طوری انتخاب کنیم که ارزش فعلی جریان سرمایه گذاری پروژه ها تحت نرخ ۵٪ با هم برابر باشد. ما جریان های سرمایه گذاری را به صورت زیر تعریف می کنیم. ارزش فعلی هر سه جریان برابر با ۱۲۸.۱۲ می باشد.

$$PV = (c_1 | 5\%) = PV(c_2 | 5\%) = PV(c_3 | 5\%) = 128.12, c_3 = (97.77, 35), c_2 = (5, 10, 90, 27.85), c_1 = (10, 20, 100)$$

بعد از محاسبه بردار نرخ بهره (با استفاده از رابطه (۶)) برای هر جریان سرمایه گذاری، باید با استفاده از رابطه (۱۳) متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی را به دست بیاوریم. خلاصه محاسبات در جدول شماره ۶ آورده شده است.

جدول شماره ۶

دوره	۰	۱	۲	۳	۴
پروژه ۱					
جریان سرمایه گذاری	۱۰۰	۲۰	۱۰	۰	
نرخ بهره در دوره		٪-۷۰	٪۰	٪۱۰۰۰	
\bar{K}	٪۱۶.۱۶				
پروژه ۲					
جریان سرمایه گذاری	۹۰	۱۰	۵	۲۷.۸۵	۰
نرخ بهره در دوره		٪-۱۲.۲	٪۵۰	٪۶۹۷	٪-۲۸.۲
\bar{K}	٪۱۴.۵۱				
پروژه ۳					
جریان سرمایه گذاری	۳۵	۹۵.۷۷	۰		
نرخ بهره در دوره		٪۳۲۲.۲	٪-۱۱۸.۴		
\bar{K}	٪۱.۹۶				
رتبه بندی			$x_1 > x_2 > x_3$		

می بینیم که بیشترین (AIRR) مربوط به پروژه ۱ می باشد، سپس پروژه ۲ دارای (AIRR) بیشتر بوده و در نهایت پروژه ۳ قرار می گیرد. نتیجه به دست آمده از روش (AIRR) همانند نتیجه حاصله از روش ارزش فعلی می باشد. در این قسمت از مقاله به ارائه رویکرد جدید می پردازیم که دارای محاسباتی ساده تر نسبت به روش (AIRR) می باشد و در عین حال پاسخگوی تمامی مشکلات روش (IRR) نیز می باشد.

۵- ارائه روش جدید:

در این روش نیازی به محاسبه ارزش فعلی پروژه و جریان سرمایه گذاری نمی باشد و همین امر موجب تسریع و تسهیل محاسبات می شود. در این روش به ارائه رابطه ای جدید برای محاسبه نرخ های بهره در طی دوره های مختلف می پردازیم:

$$K_t = r + \frac{x_t}{-x_0 \cdot (1+r)^{t-1}} \quad T T TTTTIT \quad (14)$$

$$K_T = \frac{x_T}{-x_0 \cdot (1+r)^{T-1}} - 1$$

کمیت T برابر با تعداد دوره های فرآیند مالی x می باشد.

بعد از محاسبه بردار نرخ بهره در تمامی دوره ها، یک میانگین حسابی ساده از نرخ های بهره اخذ و آن را \bar{k} می نامیم. در صورتیکه $x_0 < 0$ و $\bar{k} \geq r$ باشند، آنگاه پروژه اقتصادی خواهد بود. اگر $x_0 > 0$ و $\bar{k} \leq r$ باشند، سپس پروژه اقتصادی است. برای رتبه بندی پروژه ها باید نکات زیر را رعایت کنیم:

الف) فرض کنید می خواهیم پروژه های x_1, x_2, \dots, x_n به ترتیب با تعداد دوره های T_1, T_2, \dots, T_n با جریان نقدی برابر در دوره صفر (با x_0 برابر) را رتبه بندی کنیم. کمیت T را به صورت $T = \max(T_1, T_2, \dots, T_n)$ تعریف می کنیم. حال برای رتبه بندی پروژه ها باید تعداد دوره های تمامی فرآیند های مالی را به طول T تعریف کنیم، برای انجام این کار باید پروژه هایی را که تعداد دوره کمتری از T دارند را با اضافه کردن مقدار صفر به انتهای فرآیند مالیشان به طول T در آورده.

ب) اگر پروژه هایی را که می خواهیم رتبه بندی کنیم دارای x_0 نا برابر باشند، برای رفع این مشکل ابتدا باید کمیت \bar{x} را به صورت $\bar{x} = \min(x_0)$ تعریف کنیم (\bar{x} برابر با مینیمم x_0 ها می باشد). مشکل فرآیند های مالی که x_0 آن ها از \bar{x} کمتر می باشد را با اضافه کردن فرآیند مالی کمکی Z به فرآیند های مالی پروژه هایشان حل می کنیم به طوری که Z برابر است با $(\bar{x} - x_0, 0, 0, \dots, -(\bar{x} - x_0) \cdot (1+r)^T)$

مثال ۴:

سه فرآیند مالی زیر را در نظر بگیرید، سپس تعیین کنید که کدام پروژه ها اقتصادی هستند و سپس رتبه بندی پروژه ها را انجام دهید. (نرخ بازار ۵٪ می باشد)

جدول شماره ۷

پروژه	$x_1 = (-40, 100, 0, 0, 80)$	$x_2 = (-100, 60, 100, 10, 20)$	$x_3 = (-10, 30, -25)$
$pv(x r=5\%)$	۷.۲	-۸.۶۹	-۴.۱

می بینیم که با استفاده از روش ارزش فعلی، تنها پروژه ۱ اقتصادی می باشد و رتبه بندی پروژه ها برابر است با: $x_1 > x_3 > x_2$ حال با رویکرد جدید مسئله را حل می کنیم. ابتدا باید تعداد فرآیندهای مالی را با هم یکسان نماییم.

$$x_1 = (-40, 100, 0, 0, 80, 0) \quad x_2 = (-100, 60, 100, 10, 20) \quad x_3 = (-10, 30, -25, 0, 0)$$

بعد از یکسان نمودن تعداد دوره ها، باید x_0 ها را با هم برابر کنیم.

$$x_3 = (-10, 30, -25, 0, 0) + z_3 = (-90, 0, 0, 0, 90) \cdot (1.05)^4 = (-100, 30, -25, 0, 109.4)$$

حالا با استفاده از رابطه (۱۴) مقادیر نرخ بهره دوره ها را برای هر پروژه به دست می آوریم.

جدول شماره ۸

پروژه	بردار نرخ بهره	میانگین حسابی ساده	وضعیت پروژه
۱	(%۴۵، %۵، %۷۷.۵۶، %۱۰۰)	%۶.۸۹	اقتصادی چون $۶.۸۹ > ۵$
۲	(%۶۵، %۱۴.۵، %۱۴.۱، %۸۲.۷)	%۲.۷۲	غیر اقتصادی چون $۲.۷۲ < ۵$
۳	(%۳۵، %۱۸.۸، %۵، %۵۵)	%۳.۹۲	غیر اقتصادی چون $۳.۹۲ < ۵$
رتبه بندی	$x_1 > x_3 > x_2$		

با توجه قضیه ۸ و جدول شماره ۸، پی می بریم که فقط پروژه ۱ اقتصادی می باشد و رتبه بندی پروژه ها به صورت $x_1 > x_3 > x_2$ می باشد. قابل توجه است که نتایج به دست آمده از طریق رویکرد جدید کاملاً مشابه روش ارزش فعلی می باشد

۶- نتیجه گیری

بعضی از مدیران و تصمیم گیرندگان بنا به دلایل متعددی تمایل بیشتری به استفاده از روش (IRR) در برابر روش (PV) دارند. اما متأسفانه نتایج روش (IRR) قابل اطمینان نمی باشد، زیرا ممکن است (IRR) موجود نباشد، یا چند (IRR) به دست آید و در کل شاخص (IRR) با شاخص (PV) ناسازگار است. رویکرد هازن چشم انداز جدیدی را بیان کرد که تفاوت های زیادی با رویکرد های پیشین داشت. اما رویکرد هازن پاسخگو به تمامی مشکلات روش (IRR) نمی باشد. رویکرد دیگری تحت عنوان متوسط نرخ بازگشت سرمایه داخلی توسط مگنی ارائه شده است که می تواند مشکلات روش (IRR) را حل نماید. در این رویکرد نرخ های بهره در طول دوره های مختلف لزوماً با هم برابر نمی باشند. (AIRR) میانگین وزنی نرخ های بهره مشتق شده از جریان سرمایه گذاری می باشد که به طور دلخواه توسط تصمیم گیرنده در نظر گرفته می شود.

در نهایت این مقاله برای محاسبه نرخ های بهره در طی دوره های مختلف روش جدیدی ارائه می نماید که دارای محاسباتی ساده تر نسبت به روش های پیشین می باشد. در این روش ابتدا باید نرخ های بهره را با استفاده از رابطه (۱۴) محاسبه نموده و سپس میانگین حسابی ساده نرخ های بهره را به دست می آورید. اگر مقدار جریان فرآیند مالی در انتهای دوره صفر (X_0) کوچکتر از صفر باشد، آنگاه پروژه اقتصادی خواهد بود اگر و فقط اگر میانگین حسابی ساده نرخ های بهره، بزرگتر مساوی نرخ بازار باشد و اگر مقدار جریان فرآیند مالی در انتهای دوره صفر (X_0) کوچکتر از صفر باشد، آنگاه پروژه اقتصادی خواهد بود اگر و فقط اگر میانگین حسابی ساده نرخ های بهره، کوچکتر مساوی نرخ بازار باشد

مراجع

- [1] اسکو نژاد، محمد مهدی، ۱۳۸۴، اقتصاد مهندسی، چاپ بیست و یکم، انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر، تهران. ص ۱۱۹-۱۵۵
- [2] Gronchi, S. 1986. "On investment criteria based on the internal rate of return". *Oxford Economic Papers*, 1(March), 174-180.
- [3] Soper, C.S. 1959. "The marginal efficiency of capital: A future note". *The Economic journal*, 69(march), 174-178.
- [4] Pitchford, J.D. Hagger, A.J. 1958. "A note on marginal efficiency of capital." *The Economic journal*, 68 (December), 597-600.
- [5] Bernhard, R.H. 1977. "A more general sufficient condition for a unique internal rate of return." *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 14 (June), 337-341.
- [6] De Faro, C. 1978. "A sufficient condition for a unique non-negative internal rate of return: further comment." *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 13 (September), 577-584.
- [7] Ross, S.A. Spatt, C.S., Dybvig P.H. 1980. "Present values and internal rates of return." *The journal of Economic Theory*, 23(August), 66-81.
- [8] Kamel, P.H. 1959. "The marginal efficiency of capital." *Economic Record*, 35 (December), 429-434
- [9] Lohmann, J.R. 1988. "The IRR, NPV and the fallacy of the reinvestment rate assumption" *The Engineering Economist*, 33(4) (Summer), 303-330.
- [10] Athanasopoulos, P.J. 1978. "A note on the modified internal rate of return and investment criterion." *The Engineering Economist*, 23(2), 131-133.
- [11] Kierulff, H. 2008. "MIRR: A better measure". *Business Horizons*. 51, 321-329
- [12] Hajdasinski, M.M. 1987. "On relevant and irrelevant rates of return". *The Engineering Economist*, 32(4), (Summer), 347-353.
- [13] Hazen, G.B. 2003. "A new perspective on multiple internal rate of return." *The Engineering Economist*, 48(1), 31-51
- [14] Carlo Alberto Magni, G.B. 2010. "Average internal rate of return and investment decisions: a new perspective." *Engineering Economist* 23 (3), 10-31
- [15] Chisini, O. 1929. "Sul concetto di media [On the concept of mean]", *periodic di matematica*, 4, 106-116
- [16] graziani, R. Veronese, P. 2009. "How to compute a mean? The Chisini approach and its application", *The American Statistician*, 63(1) (February), 33-36